定常波による湖海の砂堆と砂漣

定常波による湖海の砂堆と砂漣

理學博士　野満隆治
齋藤泰一
田坂浩

I. 緒言

細砂は 20 cm/sec 程度の流速によつても流送されるといふ河川學上の事實から，Lettau 氏はダンチッヒ灣の一小内海 Frisches Haff に於ける靜振觀測[1]の振幅より割出した流速を見ると，それ位の水流を生ずべき靜振は決して稀ではないから，之によつて湖海の底質移動を生じ水底形狀に影響を生ずべきことに想到した。特に Frisches Haff の水底縱斷形狀は5つの山と4つの谷とがあつて，4節の周期的函數形をなすから，それを靜振の作用として說明すべき理論[2]を作つた。然し彼の理論は水流によつて底質が攪立てられて水が濁り其の濁度は流速に比例すとの假定に立つ。而も其の濁度の爲めに底質堆積の變化を規定する基本連續式の作り方は甚だ不明瞭で，畢竟任意の假定に過ぎざる感がある。さうして導き出された結果は結局水のセイシ運動の節に當る處から底質が取り去られ腹に當る處に堆積することとなつて居るが，浮遊し勝の細泥ならば音響に於けるクントの實驗と全く同樣，僅かの流速があつても沈まずして流速なき定常波の腹に當る處に集積するのは當然で殆んど數理的證明を要せない程である。

抑も秒速 20 cm 程度の水流で細砂が動き出すといふのは，浮流するのではなく轉流するといふ意味である。而も河川學上からわかつて居る通り轉流法則と浮流法則とは餘程趣きが違ふのである。而して湖海の靜振が底質を轉流せしめ得る程强勢なものである以上は，轉流法則による底質移動をも攻究する必要がある。又一方靜振現象を實際に觀察した人は誰も知る通り，水が濁る程に攪立てられることは事實上殆んどない。多少は濁り得るかも知れぬが，俗眼には認め難い程度であるから，クント實驗に見る樣な現象も勿論あるとは

(1) H. Lettau: Seiches des Frischen Haffes. Ann. d. Hydro. & Mar. Meteor. 60 Jahrg (1932), 229.
(2) H. Lettau: Stehende Wellen als Ursache umgestaltender Vorgänge in Seen. Ditto, 385.

思ふけれども，それよりは細粒子と雖も靜振の爲に攪立てられて浮游するほどの强力な作用は受けずに，寧ろ漸く水底を横に轉がされる程度ではあるまいか。

それで著者等は靜振の作用を底質の轉流を起す程度と見做し，轉流を起す様な沙で模型實驗を行ひ，其の結果に基づき理論的に解釋を試みることにした。實驗によると，掃流質のものは定常水波の節にも腹にも沙堆を作り，而も腹のものは節のものに及ばぬことが明かになつた。浮流質のものとは大に趣を異にするのである。

尙ほ序に沙漣（Ripple mark）問題にも論及したい。沙漣には對稱型と非對稱型とがある。非對稱型は一名流れ沙紋（Current mark）とも呼ばれ，一定方向からの流れによつて形成せられたものと云はれ，之に對し水波によつて出來るのが對稱型になるとせられる。流れが非對稱沙漣を作る機構に就いては Darwin[3] や Ayrton 夫人[4]などの研究があるが，對稱的沙漣が波によつて作られる機構に就いては未だ何等特別の研究はないようである。著者の一人野滿は十數年前此の問題を考へたことがある。波が往復運動である爲に對稱的ならしむることに就いては勿論別に云ふを俟たないが，如何なる波の種類に因つて最も沙漣を發生し易いか，從つて如何なる地形の處に出來易いか等の問題があるのである。

波が進行性（Progressive）なる場合は，水底の何處でも位相の差こそあれ同等の作用を受けるのであるから，位置の固定した沙漣の發生は相當困難ではあるまいか。素より波は流れを伴ふので，流れ沙紋の成立と同様に水底の微細な不規則が基礎になるとは思ふが，然し往復運動である以上，凹凸を對稱的にする作用の外に，互に掘返し埋戻し合つて沙漣の發達を遲らし，充分固定的な對稱型沙漣を形成するのは一定方向の流れの場合に比して困難であらう。之に反し，波が定常波なる場合には節の處は當然沙泥の運動が最も强く沙漣發生の基點となり易きは明かである。即ち定常波は進行波よりも沙漣を作ること最も迅速容易であらうと信ずる。

此の豫想の下に著者は海岸に出る機會毎に沙漣を注意し，確かに上記の事實あることを認めた。即ち潮汐の著しい遠淺海岸では，引き潮の流れによつて非對稱沙漣が顯著に發達し，假令其以前に波による對稱沙漣があつたとしても非對稱化されてしまふから，所謂遠淺といふほどはない普通の海岸を觀察するに，對稱沙漣の出來て居る場所は一般に，淺い

(3) G. H. Darwin: On the formation of ripple mark in Sand. Proc. Roy. Soc. London, 36 (1883), 18.
(4) H. Ayrton: The origin and growth of ripple mark. Ditto, 84 (1910), 285.

が岸は小規模の直立壁（例へば石垣）となつて居る下とか，小區域の窪みの內部とかにあつて，岸まで一様な勾配になつて居る處には割合少い。換言すれば小波が定常波となるに好都合の條件を具へた場所に多いのである。例へば天の橋立の如き外側はすぐに 1～2 m の深さになつて居るが，其の水底にはよく沙漣が發達して居るのを私は見た。川でも橋脚の裏側の窪みなどに最も出來易い。

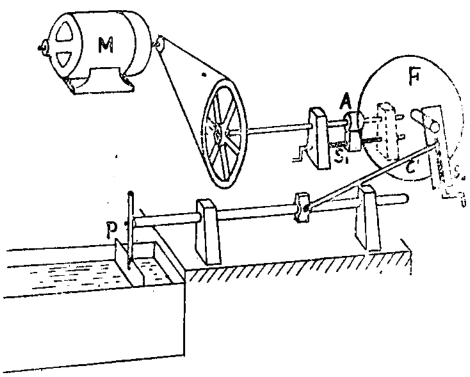
それで昭和2年8月の京大夏季講習會に海濱物理學の講演を行つた際にも此の沙漣問題に觸れ且つ模型實驗を見せたのであつたが，長方形の箱の底に硝子板を敷き砂を撒いて一方から波を送り沙漣を作つた。波の週期を適當に加減し充分定常波にすると直ちに沙漣が美事に發生するに反し，箱の固有振動週期に合はぬ波では沙漣の發生は甚だ悪く，又底の硝子板を傾斜させて一端の水面が硝子底の中途で之を切る様にし純然たる進行波にすれば中々沙漣は出來ないのであつた。

當時の考察も實驗も單に沙漣に關することだけであつたが，後に Lettau 氏の論文に接し，再び問題を擴張して沙堆と沙漣兩者を一括して考究し玆に本報告を作る所以である。

II. 模 型 實 驗

前記の想定が果して眞なりや，或は Lettau の論は如何なりやを實驗によつて檢證する爲めに模型實驗を多數に行つた。模型は十數年前沙漣實驗用に製作したものであつたが，沙漣だけなら後に述ぶる通り十數分乃至二三十分で立派に出來上るから，當時は何時間も連續運轉したことがなく，遂に沙堆の發生を認識するに至らなかつた。然るに Lettau の報文に刺戟せられ，舊器を持出し數時間連續運轉して居ると，沙堆も立派に現出し種々のことを敎へて呉れるのである。

第1圖　沙堆及び沙漣實驗裝置



模型水槽は內法長さ 183 cm, 幅 10 cm, 深さ 15 cm の長方形で，其の內底に硝子板を敷き其の上に砂を撒いて水を適當の深さ 8～10 cm に入れる。硝子板は二枚に切つてあり，實驗後水を抜いて砂堆及び沙漣を取出すのに便する。此の水槽に定常波を作る裝置は，口繪寫眞及び第1圖に示す通りである。可變

抵抗附電働器 M で廻る心棒の端 A は肉厚の革張りになつて居り，螺旋 S_1 を以て摩擦廻轉板 F との接觸點を加減し F の廻轉數從つて水波の週期を調節する。F の廻轉は曲肱 C によつてアルミ板 P の往復運動に轉化する。曲肱の長さは螺旋 S_2 によつて伸縮せられ，水板 P の運動振幅を調節するの用をなす。

水底の砂は徑 0.5〜0.2 mm の中砂と，0.2〜0.05 mm の細砂の二種を別々にも，又混合しても用ひた。勿論自然の砂を篩分けただけであるから，微量の粘土分も附着して居つて，掃流物質の外に浮游粒子の堆積狀況をも同時に觀察し得るの利を得た。

實驗に當つては，先づ所望の節數に應ずる週期を算定して，之に適する樣に電働器抵抗及び螺旋 S_1 を調節する。但し水槽の週期算定には，水板 P を移動するのであるから其の中央位置を節と見做して行つた。P の後方にも約 10 cm 程の餘裕を置いてあるから，大體それで一致した。たゞ時には水板後方の餘裕不足のため多少は常に節が水板の前方になることもあつたが，何れにしても充分定常波になる樣，螺旋 S_1 の調節を精密に行ふのである。然し調節螺旋 S_1 の餘裕も基本振動1節定常波(灣としての週期 $4L/\sqrt{gh}=7.9$ sec.)を起すことは不可能に終つて，結局 2〜7 節までの定常波を作つた。其の週期は，水板の平均位置に每回幾らかの差を生じたため n 節振動に對し $7.9/(2n-1)$ 秒と僅かの差はあるが，大體それに近いこと次表の通りになつた。

第1表　模型實驗の定常波週期と水平振幅

節　數	2	3	4	5	6	7
週　期 (sec.)	2.28	1.45	1.05	0.88	0.74	0.675
水板振幅 (cm)	6	3.5	3.8	4	3.5	3.5
水　深 (cm)	10	10	10	8	8	8

水板の水平移動振幅は，結局節に於ける水粒子の往復振幅，即ち最大水平振幅と見做してよいものである。

1. 砂 堆 の 觀 察

模型實驗にて得られた沙堆及び沙漣は口繪及び第2圖に示した樣なものである。著しい沙漣の間に沙堆も明かに認められる。即ち沙漣の平均線を引いて見れば，定常波の腹から腹にかけて沙層の厚さが波狀に起伏して居る。之が沙堆である。仍つて先づ此の沙堆から觀察を始める。

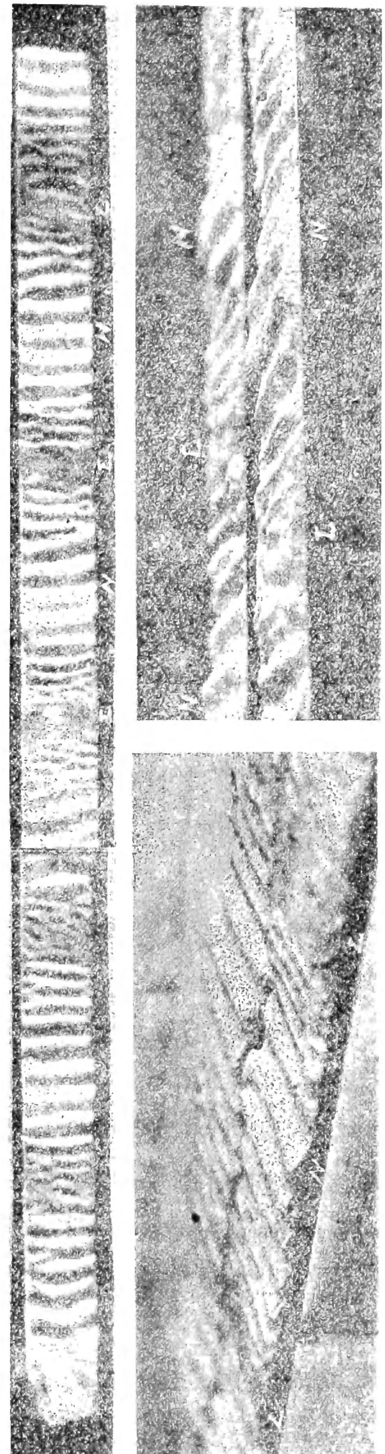
i） 沙堆の發生に要する時間は，沙漣のそれより遙かに長い。沙漣は後に述ぶる如く僅か10～30分にて顯著に發達するが，沙堆の見え始めるのは1～2時間後で，充分認識せらるるまでには3～5時間を要した。

而して此の所要時間は定常波の振幅が大なれば比較的に短く，定常波が微弱なれば長時間かゝる。又定常波の振幅が同じ場合には，節數の多いときほど沙堆は迅速に發達し，節數少なく波間が長いときは沙堆發達に長時間を要する。特に2節の場合などは隨分長い時間かゝつた。

ii） 沙堆の山と谷の位置は，Lettau の説明とは違つて定常波の節の處に最高の沙堆が出來，腹の處は原高を維持するか或は少し高まる程度で副次的沙堆（或は消極的沙堆）を形成する。そして腹と節との中間が谷となり，沙層が最も薄くなる。

但し砂粒子に附着して居た微量の粘土質は定常波の發生と共に浮上して極々薄い濁りとなり，浮動して居る内に腹の所に來りそこで漸次沈澱する。即ち浮流物質ならば Lettau の想定，或は空氣振動に對するクント實驗同樣に，腹の處に泥堆を生ずる。輕い鋸屑木粉を水に浮して實驗したこともあるが，それも腹の水面に集まり水分を含んで重くなればそこに沈澱する。

つまり，浮流物質だけなら定常波の腹の下に泥堆を作り節の處は谷となつて，水波の2倍節振動に當る波形を水底に現出するのであるが，



第2圖　沙堆及び沙漣の模型實驗例二三

少し粒が大きく掃流だけしかされない沙になれば水波自身の4倍節振動に相當する波形の沙堆を現出し, Lettau の想定とは甚だ趣を異にする。

iii) 沙粒の大さが沙堆に及ぼす影響を見るに, 中沙 (徑 0.5〜0.2 mm) を敷いた場合には, 定常水波による沙粒の往復運動は節の處に最も活潑で, 著しい沙漣を出現すると共に全體としての沙層平均の厚さも節に漸増し積極的の沙堆を作る。之に反し腹の處は若干區域の間, 沙粒は少しも動かず沙層は原厚を維持し其縁邊だけ多少厚くなるにすぎないが, 次の腹と節との中間に於ける谷に比ぶれば高いから, 消極的二次性の沙堆を形成することゝなる。

腹と節との中間は沙の往復運動が節の處ほど活潑でないのは當然で沙漣の出現も遲く其の大さも小さいが, 何時の間にか平均層厚が薄くなり, 往々にして硝子板を露出するほどに洗掘され明瞭な谷を形成する。

次に細沙 (徑 0.2〜0.05 mm) を以て實驗すると, 腹の處の沙粒不動區域はほんの僅かとなり, 縁邊の高まりは擴延し且つ增大する。節の處の沙堆は中砂の場合ほどには著しくならず, 腹縁邊の高まりと甚だしい差は無い。

次に細泥 (徑 0.05 mm 以下) のみでも實驗したかつたのではあるが, 篩分けして得た量が水槽一面に敷くには不足であつたので, 前記の中沙と細沙と細泥とを 25:58:17 の割合に混合して實驗した。それで混合沙の場合と共に細泥のみの場合も判斷することにした。

iv) 混合沙の場合には, 粒の大きい中沙は漸次に節の處に多くなりそこの沙堆の主成分をなし, 細沙は全體に亙つて分布し節の處の沙堆にもあるが腹周邊の高まりの主成分をなす。つまり前記の中沙と細沙とを別々に實驗した場合を重合した樣な形勢を呈する。而して細泥は主として腹に集まり節には無くなる(第2圖)。實際の湖海の水底に此の樣な底質分布は無きものか, 實例を得たいものと思つて居る。

2. 沙 漣 の 觀 察

次に沙漣について其の發生狀況及び形成後の性質を觀察調査する。

i) 定常波では沙漣の形成頗る容易迅速且つ極めて規則的であるが, 進行波では遲く且つ不規則に亂れ勝である。

水波の調節が甘く出來て完全な定常波に落ち付けば, 沙漣の形成が異常の速さを以て進捗し, 僅かに15〜25分で極度に達し, それ以後は連續作働しても殆んど變化がない。而も

最も迅速に出來るのは水波の節の處であつて，腹の處は最も遅く沙粒が大きい場合には全然出來ない。

然るに水波の調節が悪く定常波でなくて進行性を有する場合には沙漣の發達も甚だ悪く不規則であり，又一旦定常波に奇麗な沙漣が形成されて後にわざと水波の調節を崩して見れば，漸次に既成の沙漣が亂れ其の高さも減退する。

ii) 定常波による沙漣の發達は，節の處が最も急速且つ顯著で腹に近づくにつれ遅く且つ微小である。水の往復運動に伴ふ沙粒の水平往復が節に最も活潑で腹に最小なる當然の歸結である。尙ほ節に於ける沙粒の動きを見て居ると，水の振動に伴つて盛んに往復するが，一回毎の洗掘堆積は往動と復動とで殆んど消殺される様であるに拘らず，いつとはなしに沙漣となる。而して粒子は其山を超えて谷から谷へ往返する。

iii) 沙漣の大さは其の高さに於ても間隔（以下沙漣波長と呼ぶ）に於ても，節の處が最も大きく腹に最小である(第2圖参照)。今，節附近の最大波長と腹附近の最小波長を測つて表示すれば第2表の通りである。尙沙漣總數をも測り全距離を割つた平均波長を附記してある。

第2表　沙漣波長の位置による相違（砂は細砂）

水　波	節　　數	2	3	4	5	6	7
	水平振幅 (cm)	6.0	3.5	3.8	4.0	3.5	3.5
沙漣波長 (cm)	節附近最大	4.5	3.0	3.6	3.5	3.0	2.5
	腹附近最小	1.8	1.0	1.8	1.5	1.6	1.2
	平　　均	3.1	2.5	3.1	2.6	2.7	2.3

玆に水平振幅とは波を起す水板の往復距離を指して云ふ。

iv) 沙漣の波長は腹と節とで大差ある外，水波の節數には殆んど關係なく，幾節の定常波に於ても略ほ同長である（前表参照)。只 2 節の時の波長が稍大きい様に見えるけれども，それは水波の振幅が大なる為であつて節數の影響ではない。

v) 水波振幅の沙漣波長に及ぼす效果を見る爲には，別に節數 6 の場合に水板の往復距離だけを種々に變へて實驗して，第3表の結果を得たのである。水波が强勢になれば沙漣波長が比例的に增大する。何れにしても沙漣波長は水波の水平振幅と同程度であつて，特に最大波長は水波水平振幅の 1～2 割減に過ぎぬことを注意して置く。

第3表　沙漣波長と水波振幅との關係（水波6節，砂は中砂）

水波の水平振幅（cm）		3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
沙漣波長（cm）	最大	3.0	3.0	—	3.1	3.5	4.2
	最小	—	1.0	—	1.2	0.9	1.3
	平均	—	2.03	2.20	2.26	2.38	2.41

vi）尙第3表の實驗は沙粒直徑の沙漣波長に及ぼす影響をも見る爲に第2表の實驗とは沙種を變へて行つた。即ち第3表のは粒徑 0.5～0.2 mm の中沙を以てし，第2表のは 0.2～0.05 mm の細沙を以てした。兩表を對照すれば，沙粒の大きいものが沙漣の平均波長小で，細沙になるほど沙漣平均波長は長くなることがわかる。

vii）混合沙（中沙：細沙：細泥＝25：58：17 の割）を以て實驗すれば節の附近では粒の大きなものが主成分となつた沙漣が出來，腹に近づくにつれ微粒のものが主となり，高さも間隔も小さい沙漣になる。作働時間が長くなるほど此の傾向は益々顯著となる。

III.　沙堆及び沙漣の發生機構

定常波に伴ふ水の往復運動にて斯様な沙堆や沙漣が如何にして發生するであらうか。若し水底が元來平坦であつたものならば，水波の往動によつて底質に凹凸が出來れば，往動と全く同等の强さを持つ復動によつては沙泥が完全に元に戻つて，凹凸も復舊し再び平坦になつて然るべく，單なる常識からは考へられるではないか。然るに事實は，確かに最初數回の往復運動の間は沙泥も亦往復振動するのみで，凹凸が出來ては消え消えては出來て居る。それが數十回數百回するうちに，沙漣が顯著に發達し，又數千回數萬回する間に何時とはなしに沙堆も明瞭に現れて來るのである。玆に何か往復運動の際互に消殺出來ない或る作用が僅かながら伏在することを知るのである。然らばそれは何であるか。次に其の點を考究しよう。

1.　沙堆發生の機構

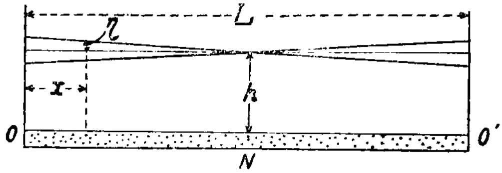
閉塞湖海の長さを L，深さを h とし，之に n 節の定常水波があつて其の上下變位が

$$\eta=a\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{2\pi t}{T},\qquad T=\frac{2L}{n\sqrt{gh}}\tag{1}$$

であるとする。T は週期で，x は一端から測つた水平距離を表はす（第3圖）。

從つて水平變位 ξ は水の連續式

第3圖　閉塞湖海の定常波と沙堆



$$\eta=-h\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

によつて，當然

$$\xi=-\int\frac{\eta}{h}dx$$

$$=-\frac{aL}{n\pi h}\sin\frac{n\pi}{L}x\cdot\cos\frac{2\pi}{T}t \qquad (2)$$

である。茲に水深 h は簡單のため一定とした。又水平流速 v は

$$\left.\begin{aligned} &v=\frac{\partial\xi}{\partial t}=-V\sin\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{2\pi}{T}t \\ \text{但し}\quad &V=a\frac{2L}{nhT}=a\sqrt{\frac{g}{h}}=\text{最大速度}\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

此の流速によつて水底の土砂が移動し，沙堆も沙漣も出來るのである。

レツタウ氏の理論と其の批判　沙堆の發生に對する理論を提出した最初の人はレッタウ氏[(5)]である。氏は沙泥が此の水流によつて浮遊するものとし，其の濁度 σ は速度に比例すると假定した。即ち

$$\sigma=\mu\cdot v \qquad (\mathrm{i})$$

と置く。而して沙粒流量の速さ（Teilchenfluss）S なるものを

$$S\equiv\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\mu\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (\mathrm{ii})$$

と定義し，之が x によつて違ふ爲に時間 t の經過につれ水底に沙泥の凹凸を作るが，其の作用は水流速度に反比例すると假定し，y を或基準面より測つた水底の高さとして

$$\frac{\partial S}{\partial x}=-\frac{\lambda}{|v|}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} \qquad (\mathrm{iii})$$

と置いた。從つて (ii) と (iii) とから

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-k|v|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

を得，之に (3) 式を代入して

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-k\left(\frac{2\pi a}{hT}\right)^2\sin^2\frac{n\pi}{L}x\cos^2\frac{2\pi}{T}t$$

---

(5) 前出 (2).

積分して

$$y=y_0-k\frac{\pi c^2}{2Th^2}\cdot\sin^2\frac{n\pi}{L}x\cdot\left\{\sin\frac{4\pi}{T}t+\frac{4\pi}{T}t\right\} \qquad \text{(iv)}$$

を得，之が時間 t に關し週期項の外に一次項を含むから，長時間たてば遂には沙堆が明瞭に發達するといふのである。而して Frisches Haff は底質が砂になつて居て，それに 4 つの谷があるから，定常水波 4 節のもの (卽ち iv 式の $n=4$) で作られたものだらうと推論して居る。

然し卑見によれば氏の論法には不可解の點が少くない。先づ第一は“粒子流動”(Teilchenfluss) S なるものである。(ii) 式の様に定義すると云つてあるが何を意味するか其の物理的意義は明瞭でない。想像するに，浮游粒子であれば擴散又は渦動交換によつて濁度の強い處から弱い處に向つて濁度勾配に比例する浮泥の流動があるといふ意味から，あの様に定義したかも知れない。それならば浮游沙泥の連續方程式は (iii) 式の様にはならず當然 $\partial S/\partial x$ は $\partial y/\partial t$ に比例し，$|v|$ で割る理由が立たぬ。

第二の點は，如何に考へても (iii) 式の右邊分母に $|v|$ を入れることは了解し難いことである。粒子流動そのものは流速の大なるときと小さいときとで變つてよいが，粒子流動の差が流速そのものに反比例するとは受取れぬ。例へば到る處等流でさへあれば流速が如何に大きくとも小さくとも到る處粒子流動は等しく，其れに差が出來る理由はない。特に $\partial S/\partial x$ を作る作用が $|v|$ に反比例するなどとは更に不可解である。沙泥の運動に關する作用は $|v|$ に比例するといふならばまだしもであるが，それでも等流ならば上記の如く $\partial S/\partial x$ を出現する筈はないのである。要するに水流速度が所によつて違ふことが唯一原因でなくてはならない。卽ち (iii) 式はレッタウ氏の勝手な純然たる假定にすぎず，之より導かれた結果も從つて餘り事由を說明したことにはならぬと私は信ずる。

浮游粒子が水波の節を去つて腹に集まることだけならば，氏の說明の如き無理な假定を用ひるよりも，單に常識的に解釋するがましではあるまいか。水が流動する限り浮いて沈めないほどの粒子ならば，腹の處以外では沈積出來ない。之に反し浮泥が一旦腹に到達すれば水流はないからそこに沈澱する。かくして底質は節の處では掻立てられること最も多く水底の谷を作り，腹の所の靜穏部に來つて沈澱し水底の山を作るといへばよい。

第三の難點は Frisches Haff の水面に於て果して節數 4 つもある高次振動のみが發達す

るや否やである。氏の前論文[6]を飜讀しても，基本1節振動（週期9時間）は餘り發現せぬが，2節振動は往々强度に發現するとして其の實例を掲げて居る。最もよく發現するのは1時間週期のもので之は同海の横振動であらうが，4節縱振動の存在に就いては別に言及してないやうである。Frisches Haff の水底形狀が水の4節縱振動によつて成形されると主張するならば，同海の頻發セイシが4節のものであることを明示して貰ひたかつたのである。

著者の理論 以上の如くレッタウ氏の所論には承服し難い諸點を見るのであるが，然し著者は之によつて啓發される處多く，一示唆を受けた。著者が十數年前沙漣の實驗をして居た頃には，水底全體に亙る波狀沙堆が往復同勢力の定常波によつて發生し得るものとは考へられず，沙漣の出現を見れば運轉を止めてしまふのが常であつた。然るに氏の報文に接して見ると或は其の様な沙堆發生が可能かも知れぬと感じ，又同時に河川の掃流法則を聯想したのである。レッタウ氏は Frisches Haff が沙質底質なるを示しながら浮游粒子と考へて理論を組立てゝ，沙堆發達が水流速度の二乘に比例し從つて4節セイシを考へぬことには同海の水底形狀を說明し得ぬのであつたが，然し靜振現象を實見した人ならばその爲に水が濁るといふ樣なことは殆んどないことに氣が付くであらう。況んや底質が沙である場合，それが靜振によつて浮上されることは困難で，單に水底を前後に轉動掃流されるにすぎまい。ところで，掃流法則は河川學上熱心に硏究せられて居つて，Fargue 氏[7]によれば掃流沙量は流速の3.2～4乘に比例するといひ，又 Straub 氏[8]によれば單位時間に

$$G'=Kv^2(v^2-v_c^2),\quad v>v_c\ (\text{掃流限界水流速}) \qquad (4)$$

だといふ。掃流限界速度 v_c (Critical velocity) とは，之以上の流速になつて始めて沙粒が動き出し，夫以下の水流では沙が動かぬ様な速度であつて，沙の種類に關する定數である。Fargue の實驗法則で指數が 3.2 附近まで低下するのは，此の限界流速を無視せる爲であつて，流速が比較的に遲い場合には v_c を度外視して v の指數を算出すれば過小となるのは當然である。

---

(6) 前出 (1).

(7) Fargue: Études sur la corrélation entra la configuration du lit et la profondeur d'eau dans les livières à fond mobile. Ann. d. Pont et Chaussées (1878, 1884, 1886); Einwirkung des strömenden Wassers auf den Sand der Sohle. Ditto (1894), 426.

(8) L. G. Straub: Hydraulic and sedimentary characteristics of rivers. Trans. Am Geo. Union (1932), 375.

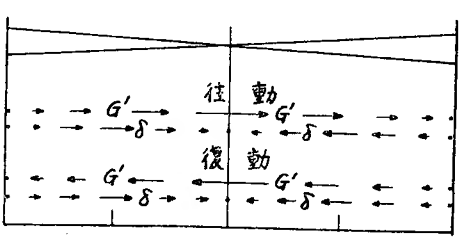
此の様に掃流沙量が水流速度 v の4乘に比例するならば，レッタウの計算から推して定常水波による底質の移動は更に節數が2倍となり，Frisches Haff の底形も氏が實在を確認して居る2節靜振で以て底形の說明がつくだらうといふ感じが起つた。そして節の處も砂堆が出來ることになるから，レッタウの理論とは一致しない筈である。か樣な豫感を以て模型實驗に取懸つたのであるが，實驗の結果は果して其の樣になつた。それで今改めて(4)式を基礎に沙堆發生の理論を組立てることにする。

たゞ玆に注意すべきは，所謂掃流法則なるものは均一等流の場合の實驗より割出されたものであつて，波動の如く近距離にも流速が變つて居る不等流に就いては未だ特別の研究がない。その樣な不等流に對し，單に各所の流速に應じ他とは獨立無關係に(4)式の掃流が行はれると考ふるのは妥當であるまい。何となれば，前後の流速に差なく從つて沙泥掃流も各所同一であれば前後互に影響なく(4)式の成立を見るのであるが，前後の流速に差があり，例へば前方に迅く後方に遲い場合には，前方の土砂洗掘の急進行が後方の掃流を促進するであらう。又反對に前方が遲く後方が急流ならば，前方の緩慢な沙泥に阻害されて掃流は幾分減殺されるであらう。斯く考へると，靜振に伴ふ水流の如き不等流に於ては，沙泥掃流量として(4)式に或修正項 δ を附加せねばならぬ。而して其の修正量 δ は流速從つて掃流力の增率と共に增加すべきであるから，著者は不等流に於ける實際の掃流沙量 G を單位時間に

$$G=G'+\delta=G'+b\frac{\partial|G'|}{\partial x} \qquad (5')$$

と置いて大過なしと信ずる。b は或定數で一般に小さいものと思はれる。尙ほ玆に修正項中の G' だけを絕對値 $|G'|$ の形にしたのは，其の符號を考へてのことである。即ち G' 其のものは定常波の往動に於ては正，復動には負となり方向を變ずるに拘らず，修正項 δ は前記の性質上往動にも復動にも共に第4圖の如く節の後半では正，前半では負で，常に節に向つて集流する樣な方向を取るからである。

第4圖　定常振動に伴ふ沙泥掃流の方向



さて，斯樣な掃流が定常波によつて湖海の水底に行はれるとき，沙量の連續式を作れば，y を基準面より測つた水底の高さとして

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\partial G}{\partial x}=-\frac{\partial G'}{\partial x}-b\frac{\partial^2|G'|}{\partial x^2} \tag{6}$$

が得られる。故に (4) 式を之に代入し且つ符號を明示する様に書けば

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t}&=0, \quad v<v_c\\ &=-K\frac{\partial}{\partial x}\left\{v\,|v(v^2-v_c^2)|\right\}-bK\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v^4-v_c^2v^2), \quad v>v_c\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

更に此の式に(3)式の v を代入して，t につき積分すれば水底各部の高さ y が得られる。

先づ腹の附近若干で $v<v_c$ の間は，沙粒が少しも動かぬから水底は原高を維持して，消極的な隆起部となることが知られる。

其の他の處 $(v>v_c)$ では，式が長たらしくなるから，便宜上 (7) 式の主要項と修正項に對する分を別々に計算しよう。

往復掃流沙量の大部分に相當する (7) 式の第 1 項による y を y_1 にて表はせば，

$$\sin^2\frac{n\pi}{L}x=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2n\pi}{L}x\right)$$

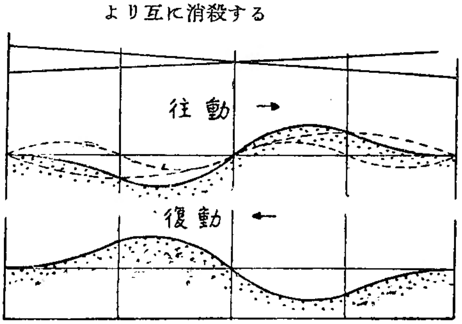
$$\sin^4\frac{n\pi}{L}x=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-2\cos\frac{2n\pi}{L}x+\frac{1}{2}\cos\frac{4n\pi}{L}x\right)$$

に注意し

$$\begin{aligned}y_1=KV^2\frac{n\pi}{L}\Bigg\{&V^2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{4n\pi}{L}x-\sin\frac{2n\pi}{L}x\right)\int\cos\frac{2\pi t}{T}\left|\cos^3\frac{2\pi t}{T}\right|dt\\ &+v_c^2\sin\frac{2n\pi}{L}x\int\left|\cos\frac{2\pi t}{T}\right|\cos\frac{2\pi t}{T}dt\Bigg\}\end{aligned} \tag{8}$$

故に水底は水波の四倍節と二倍節の正弦波形に洗掘堆積を繰返すこと第 5 圖の如くなる筈である。即ち此の場合には波形が腹と腹との間に對稱的でなく，一半に山他半に谷を形成するが，往動と復動とで其の關係は逆になるから，何回振動しても往復互に消殺し合ひ，完全週期間には水底の變化を殘さず，只其の中途に暫定的沙堆を見るのみである。而も其沙堆の高さは振動が數百回數千回行はれても，初回の場合と同じであるから實際上には沙粒の活潑な往復を見るのみで沙堆の形狀は認識出來ない微弱なものである。斯様に土砂の活潑な往復運動がありながら，其の主要部分は往動と復動とで互に相殺

第 5 圖　掃流沙泥の大部分は振動の往復により互に消殺する



し合ひ沙堆形成に何等の貢獻なきことは，普通の單純な常識にも又模型實驗の結果にも一致する處であつて，寧ろ沙堆の形成されることが不思議なくらゐである。

然るに (7) 式の右邊第二項即ち修正項によつて沙堆が徐々に形成されるのである。即ち此の二次的副作用に應ずる y は

$$y=2bKV^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left\{V^2\left(\cos\frac{4n\pi}{L}x-\cos\frac{2n\pi}{L}x\right)\int\cos^4\frac{2\pi t}{T}dt\right.$$
$$\left.+v_c^2\cos\frac{2n\pi}{L}x\int\cos^2\frac{2\pi t}{T}dt\right\} \qquad (9)$$

此の場合の底形は餘弦函數で表はされるから，節を中心に前端後端とも對稱的である。而も往動にも復動にも積分記號內は正であつて累加される故，上式の時間に對する積分は器械的に實行してよい。ところで

$$\int_0^t\cos^2\frac{2\pi t}{T}dt=\int\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{T}t\right)dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{T}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{T}t\right)$$
$$\int_0^t\cos^4\frac{2\pi t}{T}dt=\int\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2\cos\frac{2\pi}{T}t+\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{T}t\right)dt$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}t+\frac{T}{\pi}\sin\frac{2\pi}{T}t+\frac{T}{8\pi}\sin\frac{4\pi}{T}t\right)$$

であるから，(9)式の右邊は時間に關し週期的な部分と時間に比例する部分とから成立つ。週期的の部分は完全週期經過する每に消滅すること前項に同じく，永久變形としては殘らぬから，沙堆問題としては省略して差支ない。

かくて結局，沙堆の形成としては，積分常數を y_0 とし

$$y=\frac{3}{4}bKV^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left\{V^2\cos\frac{4n\pi}{L}x-\left(V^2-\frac{4}{3}v_c^2\right)\cos\frac{2n\pi}{L}x\right\}t-y_0, \qquad (10)$$

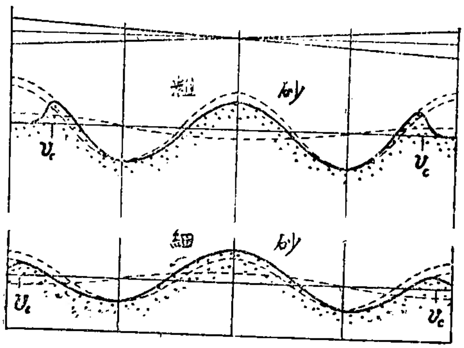
尙ほ普通の湖海では V が v_c を越す程度は餘り著しいものではなく，從つて $V^2-\frac{4}{3}v_c^2$ は V^2 に比し餘程小さいのが例である。故に實用上は

$$\left.\begin{aligned}y&\fallingdotseq\frac{3}{4}bKV^4\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\cos\frac{4n\pi}{L}x\times t-y_0, \quad v>v_c\\ &=0, \qquad v<v_c\end{aligned}\right\} \qquad (10')$$

何れにせよ，靜振による水底變形は水波の 4 倍節の餘弦函數が主項で，靜振の腹のみならず節の處にも砂堆が出來，腹と節との中間が谷になる。從つて Frisches Haff の底形も，Lettau の如く存在の確認されて居ない 4 節水波に歸因せしむるを要せず，存在の明白なる 2 節靜振に因ると判定し得る樣である。

尚茲で注意すべきは，腹の處の $v<v_c$ なる間には掃流がないから（10′）式の計算も其の緣邊までに止むべく，從つて水底全體の形狀は大體第6圖の樣になるであらう。勿論此の $v<v_c$ なる範圍は大粒の沙に對して廣く，細粒になるほど狹くなり實用上は腹の直下まで堆積する場合もあり得る。

第6圖　掃流二次作用による砂堆の形狀



又沙堆の發達は（10′），（1），（3）諸式よりして

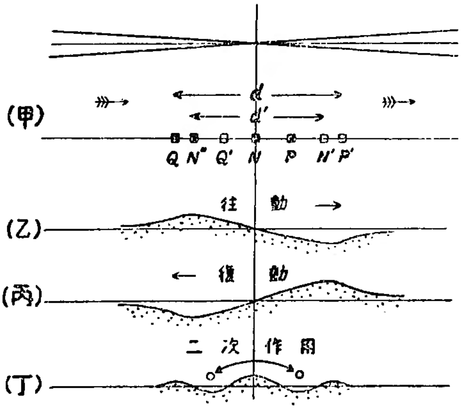
$$y\infty\frac{n^2V^2}{L^2}t\ \infty\frac{n^2}{L^2h^2}a^4t \tag{11}$$

に比例するから，時間が長く年月さへたてば遂には目立つ樣になるし，又湖海が淺く靜振の振幅大なるほど迅速である。湖海の長さに對する關係は，振幅が一定ならば短いものほど又節數の多いほど沙堆の發育迅速なるわけであるが，然し實際の湖海では一定の原因力による靜振は，當然長い湖海ほど又節數の少ないものほど振幅大なるを例とするから，沙堆の發達もさういふ場合に却つて迅速になると思はれる。

2. 沙漣發達の機構

沙堆の發生は前述の如く湖海の水體一括しての振動掃流に起因するのに對し，沙漣の發達は各個水分子の軌道運動によつて規定せらるゝ樣である。即ち水分子の狹い範圍內に於ける往復振動が沙漣を形成する機緣となるもので，從つて其の往復振動の最も活潑なる靜振の節に於て初生すべきこと次の如くであらう（第7圖參照）。

第7圖　沙漣發達の順序



定常波の節に於ける水分子の振動距離（簡單の爲め水平振幅と呼ぶ）を d とすれば，之に伴ふ沙粒の振幅（普通用語の二倍）d' は其の比重大なる關係上いくらか d よりは小さい。但し大體の程度は同じであらう。然し，節より離るゝに從ひ水分子

の水平振幅は漸減するから，沙粒のそれも隨つて漸減する。即ち平衡位置より水粒子が往動を起せば，$\frac{1}{4}$ 週期後には，初め節にあつた沙 N が N' に移る間に其の前方 P にあつた沙は P' に移る。而して $PP'<NN'$ であるから，沙は原狀よりも狹い範圍に集められて N' を頂點とする高まりが出來る。之に反し N より後方では N''（但し $N''N=NN'$）にあつたものが N に來り，Q（但し $QN=NP'$）にあつたものが $Q'(QQ'=PP')$ に來るから，原狀よりも廣い範圍に撒かれて低くならざるを得ぬ。かくして乙圖の樣な形の凹凸が微かに形成される。次の $^1/_4$ 週期の復動では之が平均されて平坦となり，更に $^1/_4$ 週期の復動後半で丙圖の樣な凹凸を作る。最後の $^1/_4$ 週期往復で之が再び平均されて平坦となり，最初の原狀に復歸する。

かくして沙粒は水分子の振動に伴ひ幾らか狹い距離內を活潑に往復移動して沙漣を作らうとするのであるが，折角の作用も往動と復動とは逆效果を奏して互に消殺し，中々固定的の沙漣にはならない。

然し玆に想ふべきことは，前記沙堆發生の機構である。沙堆でも簡單に考へると今いつた樣に往動と復動が互に消殺して發生し得ぬ樣に思はれ，事實水流の作用は大部分 (7) 式の第一項の樣に無效である。それが處によつて流速の變る不等流なる爲めに，微弱ながら沙堆を作る原因となり，夥だしい回數の振動を繰返すうちに充分認識し得べき程度に發達するのである。

水分子の軌道運動も又處によつて速度を異にする。從つて同樣の機構が働き，小規模ながら同形式の水底變形を生じて沙漣を形成するものと私は考へたい。既に一個の沙漣が節の處に發生すれば，その後は其を種子として，普通の流れが沙漣の系列を作ると同樣にして，既存沙漣の裏側を小渦動にて抉り少し先きに堆積して第二の沙漣を作り，順次腹の方へ向つて沙漣の系列を發現するであらう。

以上の考察は吾々の沙漣模型實驗に現はれた總ての事實に調和する。

先づ第一に沙堆と同一機構であるならば，沙漣の發達も(11)式の樣な關係を示さねばならない。ところで我々の模型實驗では沙堆も沙漣も同じ定常波を以て同時に作つたのであるから，節に於ける全體としての水流も水分子の軌道速度も同一である。從つて(11)式の振幅 a は兩者に對し同じである。然らば沙堆と沙漣とが同高に發達する迄の時間は $(L/n)^2$: d^2 の比になつて然るべきである。然るに我々の模型は $L=183$ cm, $d≒4$ cm であるから，

$n=6$ の定常波でも，沙堆の發生は沙漣に比し58倍ほどの時間を要する勘定になる。ところが第2圖の寫眞からわかる通り沙堆の高さが沙漣の夫れより遙かに低いに拘らず，其の出現には3～5時間もかゝつたのである。之に反し沙漣の方は僅々10～30分前後を以て充分の發達を示し，沙堆よりは十數分の一にも足らぬ時間で事足りるので，上記理論の要求に合致するといつてよい。

かくて沙漣は短時間（數百乃至數千回の振動）で發現するに對し，沙堆は非常に長時間（數萬乃至數十萬回の振動）を要する理由が明かになつたと思ふ。

又沙漣に於ける砂粒の運動を觀察すると，山を超えて谷から谷へ往返し山から山へ往返するのでないことも沙堆の性質と同じで，最大流速の點（定常波では節）に沙の山が出現するわけである。之も沙漣の發生機構が沙堆の機構と同類なる一證となる。

更に沙漣の波長が定常波の節數には無關係で單に水分子の水平振動距離によつて規定せられ，節の處の波長は前記の d（模型實驗の水板振動距離）に略ほ近いこと，而も夫れが粗沙より細沙の場合に僅かながら増長して益々 d に近づくこと，水波の振幅に伴つて沙漣波長も増大すること，又節の處よりも腹の方に近づくほど短波長となることなど，何れも上記考察の機構に調和するものである。卽ち水分子の軌道運動によつて沙粒の往復が規定せられる爲である。

IV. 結　　論

以上の要點を摘記すれば

1）定常波による湖海底の沙堆及び沙漣發生の可能を模型實驗にて示し，之が理論的解釋を試みた。

2）先づ沙堆に就いては，浮游性の細泥ならば水波の二倍節泥堆を作り，靜振の節に谷，腹に山を生ずるが，轉流性の沙粒では水波の四倍節に當る沙堆を作り，節と腹とが共に山を成し其の中間に谷が出來る。

然して節の沙堆は粒が大きく腹は細粒になる。

3）但し沙粒が比較的大きいもののみなる場合には，腹の附近若干は少しも沙粒の運動なく水底は原高を維持して消極的副沙堆となり，節のみ著しく高い積極的沙堆を形成する。

何れにしても，Frisches Haff の水底形狀はレッタウが存在不確實の4節靜振で說明せんとしたよりも，存在の確認されて居る2節靜振によつて充分其の成因が諒解出來ること

を知つた。

4) 靜振に伴ふ沙粒移動の大部分は水の往動と復動とで互に消殺され，沙堆の發生には役立たぬ。只流速が一様でない不等流たる爲の二次的副作用が極めて僅かづゝ沙堆發生に貢獻するだけである。從つて其の發達は極めて長時間を要する。

模型實驗でさへも水波振動が數萬回乃至十數萬回以上になつて，始めて認識される程度の沙堆を得た。

5) 沙堆發達は水深が淺く又靜振の振幅が大なるほど速い。又振幅が同一ならば湖海が短く，多節振動の場合ほど速い。然し實際の湖海では長い海で節數少い靜振ほど，其の振幅が大なるを例とするから，沙堆の發達も急であらう。

6) 次に沙漣に就いては，初めに定常波（靜振に限らず小規模な直立壁前の普通の波による定常波でもよい）の方が規則正しく且つ顯著な沙漣を作り易く，進行波では其の成形が遲く且つ不規則で亂れ勝ちになることを示した。

7) 沙漣は定常波の節に最も迅速に且つ高さも波長も最も大きく成長し，腹には最も遲く且つ高さも波長も最も小さく出來る。

特に砂粒が相當大形のもののみなる場合には，腹には沙漣が出來ない。

8) 然し沙漣の波長は，定常振動の水分子往復距離に制約されるもので，如何に大きくともそれより幾分短かい。

9) 沙漣の波長は又，定常波振幅が增すに伴ひ又沙粒が小さいほど幾分か增長する。之は水分子振動に伴ふ沙粒の往復距離が增加するによる。

然し定常波の節數には無關係である。

10) 底質が大小粒の混合沙なる場合には，定常波の節に於ける沙漣は大粒のものより成り，腹に近づくほど細粒のものになる。

11) 沙漣上に於ける沙粒の運動は，山を超えて谷より谷へ往復し，山より山へ往復するのではない。

12) 沙漣の定常波による發達は沙堆に比すれば極めて速く，振動回數何百乃至何千回の程度で充分に生長する。模型實驗では沙堆が數時間を要するに對し，沙漣は僅かに10～30分で顯著に出現した。

13) 以上の實驗結果を參考に沙堆沙漣の發生機構を下の樣に判定した。

沙堆は湖海の水全體としての振動に起因し，その水平流速が所によつて異なる不等流なるために，往動と復動による掃流沙量が完全には消殺されない二次的副作用の存在するによる。

之に反し沙漣は水分子の軌道運動によつて規定せられる。而してその往動と復動の作用が完全には相殺されない理由は，其の短距離軌道内に於ける流速の不等なるに起因することと沙堆の場合に異ならぬ。

14) 從つて沙堆が多節靜振なるほど迅速に發達されると同様の理由により，沙漣は其の水分子軌道距離にまで靜振の節間距離を極度に短縮した極小規模のものに外ならぬ様である。

終りに本實驗は學術振興會第14特別委員會の費用を以て行つた。厚く謝意を表する。